Prednáška 5

Vo vektorovom kalkule je divergencia (unárny) lineárny diferenciálny operátor (z $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ do $C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$), ktorý udáva intenzitu vtekania (odtekania) vektorového poľa (tekutiny, elektrického náboja atď.) - tzv. žriedlovosť vektorového poľa. Ak napr. skúmaným poľom gradient teploty (vektory nech udávajú napr. rýchlosť vedenia tepla), potom kladná divergencia v danom bode znamená, že v danom bode vzniká teplo, záporná naopak, že v danom mieste teplo zaniká. Pochopenie nasledujúcej definície si vyžaduje vzťah a znalosť plošných integrálov, ktorými sa budeme zaoberať neskôr.

Definícia 5.0.1.

Nech $\mathbf{F}$ je spojito diferencovateľné vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, potom jeho divergenciu definujeme ako skalárnu veličinu

$$\operatorname{div} \mathbf{F} := \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Napriek tomu, že je divergencia definovaná v kartézskych súradniciach, ide o invariantnú veličinu vzhľadom na "tuhé"[1] transformácie súradníc, a teda nadobúda rovnaké hodnoty vo "všetkých" súradnicových sústavách.

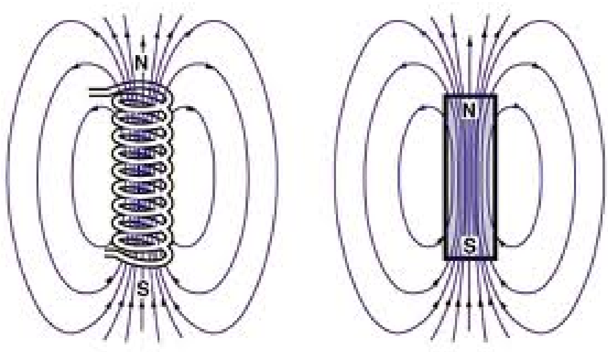
Definícia 5.0.2.

Nech $\mathbf{F}$ je spojito diferencovateľné vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, potom ak $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ na M, tak pole F nazývame solenoidálne (nežriedlové) na M.

V mechanike tekutín to má prirodzenú interpretáciu, rovnica kontinuity tvrdí, že hustota tekutiny $\rho(\mathbf{r})$ a rýchlosť tekutiny $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sú vo vzťahu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

[1] Z angl. rigid coordinate transformation.



Obr. 5.1: Magnetické pole.

Rovnica riadi správanie sa vo všeobecnosti stlačiteľnej látky (napr. plyn). Avšak, ak má tekutina (napr. voda) konštantnú hustotu $\rho = \rho_0$ (nestlačiteľná), tak z danej rovnice máme div $\mathbf{v}$=0. Matematické vyjadrenie zákona o zachovaní hmoty potom predstavuje určité obmedzenie na vôľu výberu vektorového poľa. Keďže nestlačiteľná látka nemôže nikde vznikať ani zanikať, musí byť prenosové pole $\mathbf{v}$ také, že nikde nemá body vzniku (žriedla) a ani body zániku.

Príklad 5.0.3.

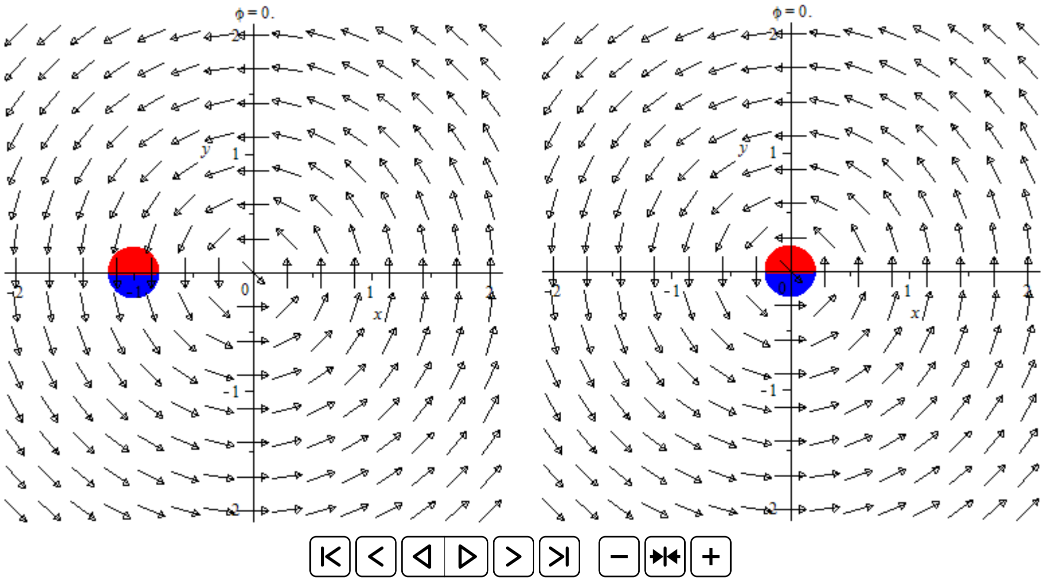
Príklad solenoidálneho poľa je magnetické pole. Magnetické pole možno teda vyjadriť pomocou nového vektorového poľa tzv. vektorového potenciálu magnetického poľa.

Vo vektorovom kalkule je rotácia lineárny diferenciálny operátor (z $C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ do $C^0(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$), ktorý v každom bode udáva lokálnu mieru rotácie (otáčania) definovanú týmto poľom - tzv. "mikroskopická" cirkulácia poľa. Môžeme si to predstaviť tak, že v každom bode poľa je veľmi malička gulička s fixovaným stredom, ktorá cirkuluje okolo svojho stredu. Tu je rozdiel od makroskopickej cirkulácie, pri ktorej táto gulička cirkuluje globálne (napr. okolo osi z) popisujúc tok daného vektorového poľa.

Definícia 5.0.4.

Nech $\mathbf{F}$ je spojito diferencovateľné vektorové pole z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$, potom jeho rotáciu definujeme ako vektorovú veličinu

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} := \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$



Obr. 5.2: Makroskopická a mikroskopická rotácia vektorového poľa $\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$.

Definícia 5.0.5.

Nech $\mathbf{F}$ je spojito diferencovateľné vektorové pole z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$, potom ak $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$ na M, tak pole $\mathbf{F}$ nazývame nevírivé na M.

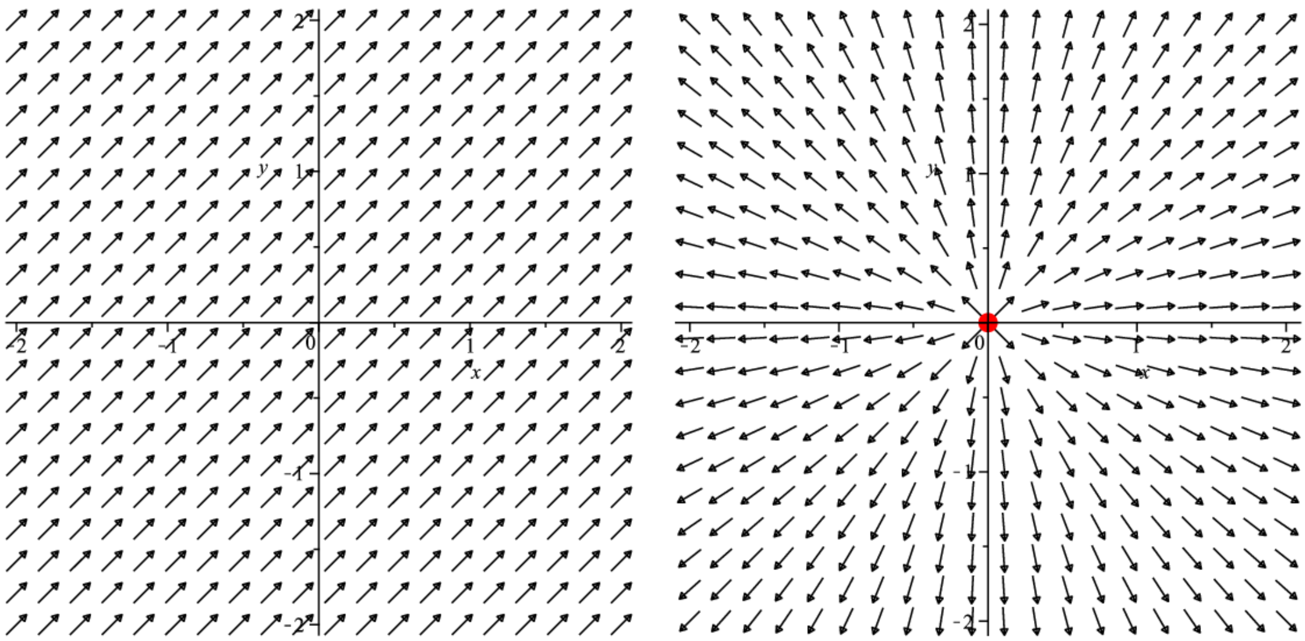
Príklad 5.0.6.

Pole $(-y, x, 0)$, obr. 5, má mikroskopickú aj makroskopickú rotáciu, ale pole $\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ je už nevírivé (a aj solenoidálne) na ľubovoľnej M neobsahujúcej počiatok napriek tomu, že má stále makroskopickú rotáciu. Navyše pole $\left(-\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, 0\right)$ má aj mikroskopickú rotáciu. Overte !

Poznámka 5.0.7.

Na základe predošlého príkladu si treba uvedomiť, že obrázok vyobrazeného poľa nám nemusí nič napovedať o mikroskopickej rotácii. Makroskopická rotácia neimplikuje automaticky mikroskopickú rotáciu. Navyše príklad poľa $(y, 0, 0)$ ukazuje, že že ak pole nemá makroskopickú rotáciu, stále môže mať tú mikroskopickú.

O vzťahu týchto pojmov hovorí Stokesova veta, s ktorou sa stretneme neskôr.



(a) $\mathbf{F} = (1,1)$, $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ (b) $\mathbf{F} = (x,y)$, $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2$

Obr. 5.3: Divergencia vektorových polí.

Problém 5.0.8.

Zamyslite sa nad vzťahom konzervatívnosti a nevírivosti poľa.

Laplaceov operátor je lineárny diferenciálny operátor vektorovej analýzy, definovaný ako divergencia gradientu daného skalárneho (tenzorového poľa).

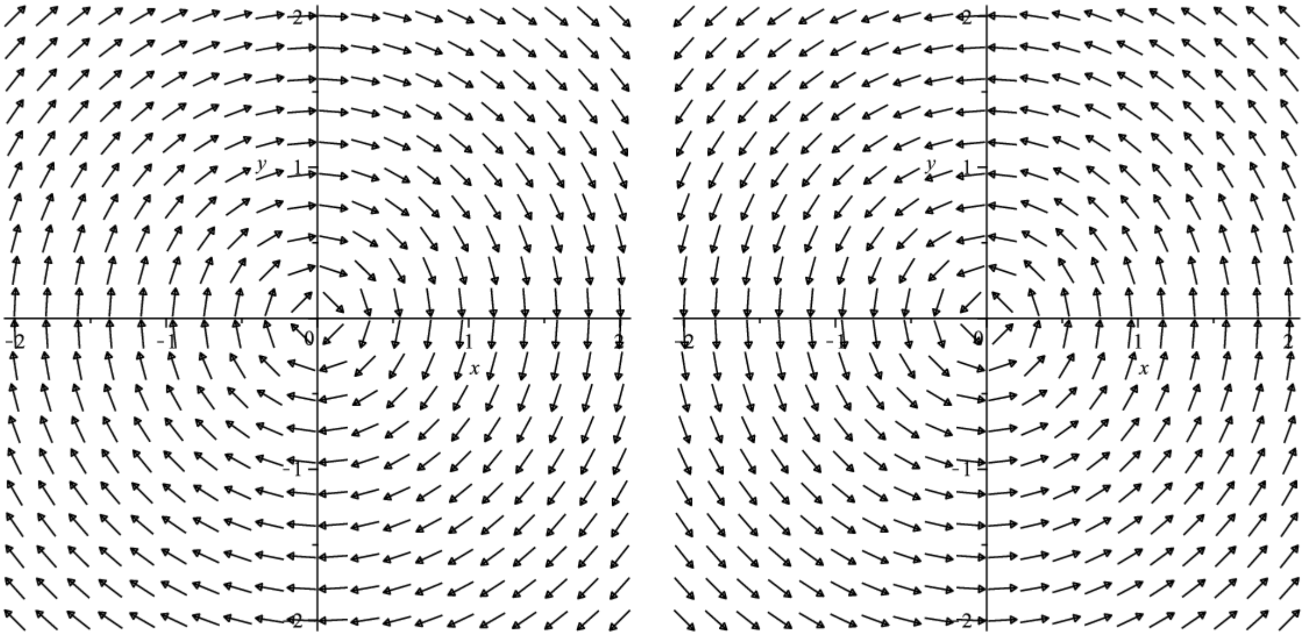
Definícia 5.0.9.

Nech F je C^2 skalárne pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$. Laplacián je definovaný ako

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \operatorname{div}\operatorname{grad} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

a teda použitý na pole F, $\Delta F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$.

Laplacián Δf v bode p "meria" o koľko sa $f(p)$ odchyľuje od priemeru f na "malej" guli so stredom v p.



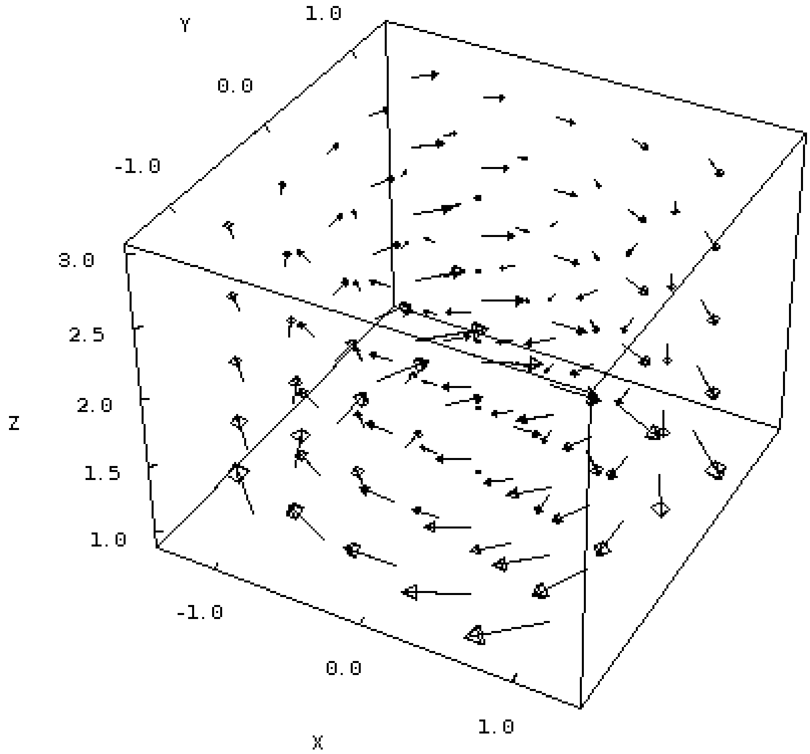
(a) $\mathbf{F} = (y, -x, 0)$, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, -2)$ (b) $\mathbf{F} = (-y, x, 0)$, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, 2)$

Obr. 5.4: Rotácia vektorových polí.

V podstate nám dáva informáciu o tom, ako sa graf funkcie zakrivuje (konkávnosť, konvexnosť). V prípade, že laplacián je nulový, znamená to, že $f(p)$ sa lokálne rovná priemeru f a teda ak je graf funkcie v nejakom smere "zakrivený dole", musí sa v inom "zakriviť hore". Funkcie, ktorých laplacián je nulový (na nejakej množine) sa nazývajú harmonické.

Poznámka 5.0.10.

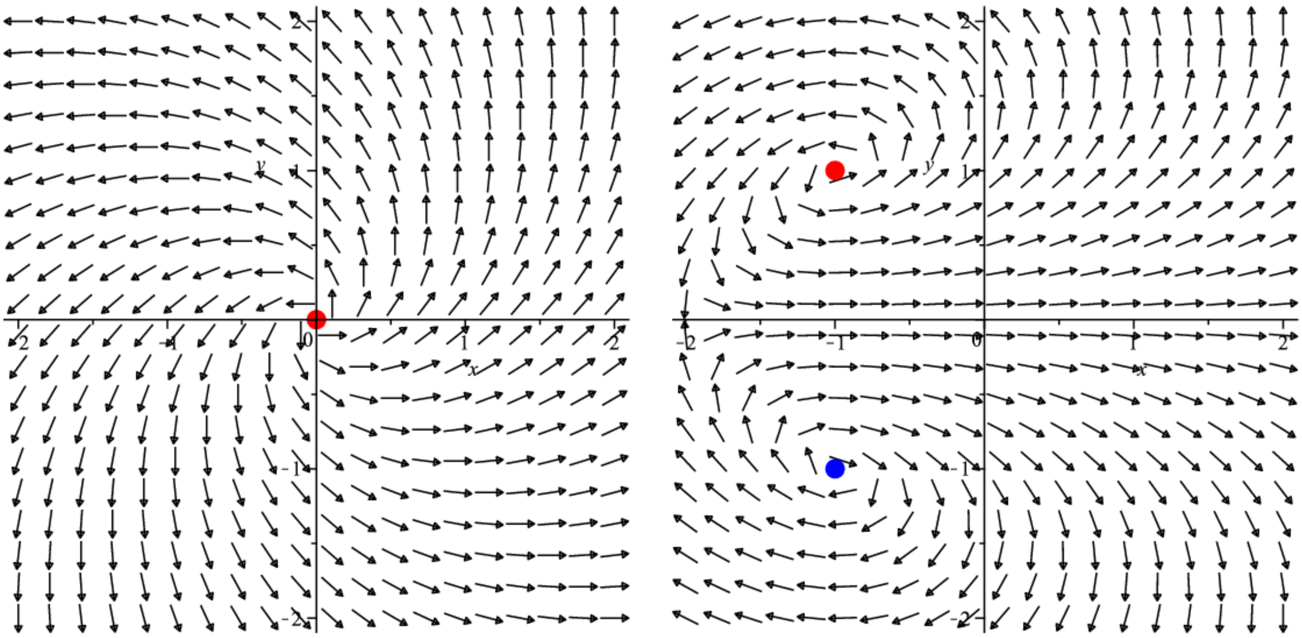
Všetky nedegenerované kritické body nekonštantnej harmonickej funkcie zodpovedajú sedlovým bodom.



Obr. 5.5: 3D vektorové pole $\mathbf{F} = (y/z, -x/z, 0)$.

Lema 5.0.11 (Vlastnosti skalárneho a vektorového súčinu)**.**

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
2. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
3. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$
4. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
5. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}$
6. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
7. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C}$
8. $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$
9. $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D})\,\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})\,\mathbf{D}$



(a) $\mathbf{F} = (x - y, x + y, 0)$, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2$, $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, 2)$ (b) $\mathbf{F} = (x - y^2 + 2, xy + y, 0)$, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2 + x$, $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (0, 0, 3y)$

Obr. 5.6: Nenulová rotácia aj divergencia vektorových polí.

Veta 5.0.12 (Vlastnosti divergencie)**.**

Nech $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

(a) $\operatorname{div}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{v}$

(b) $\operatorname{div} \phi\mathbf{u} = \phi \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla\phi \cdot \mathbf{u}$

Nech $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ a $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

(c) $\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

Veta 5.0.13 (Vlastnosti rotácie).

Nech $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

(a) $\operatorname{rot}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{rot}\mathbf{u} + \operatorname{rot}\mathbf{v}$

(b) $\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{u} - (\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{v}$

(c) $\operatorname{rot}(\phi\mathbf{u}) = \phi \operatorname{rot}\mathbf{u} + \nabla\phi \times \mathbf{u}$

Nech $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ a $\mathbf{u} \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

(d) $\operatorname{rot}\nabla\phi = \mathbf{0}$

(e) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{u}) = \nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) - \Delta\mathbf{u}$

Vlastnosť (d) nám hovorí, že gradient ľubovoľného hladkého skalárneho poľa je nevírivé pole.

Veta 5.0.14 (Základné identity diferenciálnych operátorov).

Nech $\phi \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ a $\mathbf{u} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$

(a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{u}) = 0$

(b) $\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \operatorname{rot}\mathbf{v} + \mathbf{u} \times \operatorname{rot}\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u}$

(c) $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \operatorname{rot}\mathbf{u} \times \mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{u}|^2$

Vlastnosť (a) nám hovorí, že rotácia ľubovoľného hladkého vektorového poľa je solenoidálne pole.